Eine Einführung in die Vektorrechnung

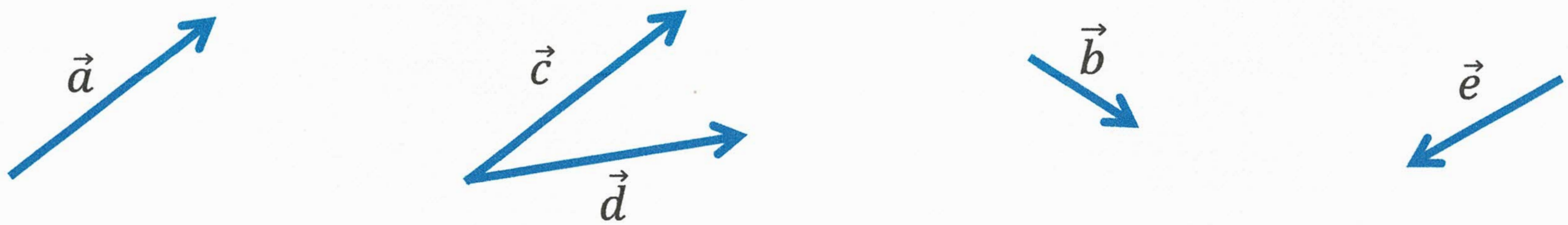
V1.0

Geschrieben von Denis Friske in 2011
EMail: denisfriske@web.de

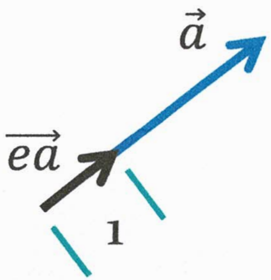
Definition eines Vektors

Wie bildet man nun einen Vektor ?

Vektoren schreibt man mit einem Kleinbuchstaben und einem Pfeil über dessen.
Sie zeigen in eine bestimmte Richtung und haben eine bestimmte Länge (Betrag).

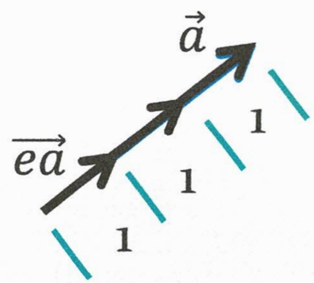


Damit man weiß, wie lang ein Vektor ist, muss man ihm einen Maßstab geben. Dies macht man mit den **Einheitsvektoren**. Wie der Name schon verrät, haben diese die Länge 1.



Nun schaut man wie oft der Einheitsvektor $\overrightarrow{ea}$ in die Länge des Vektors $\vec{a}$ passt.

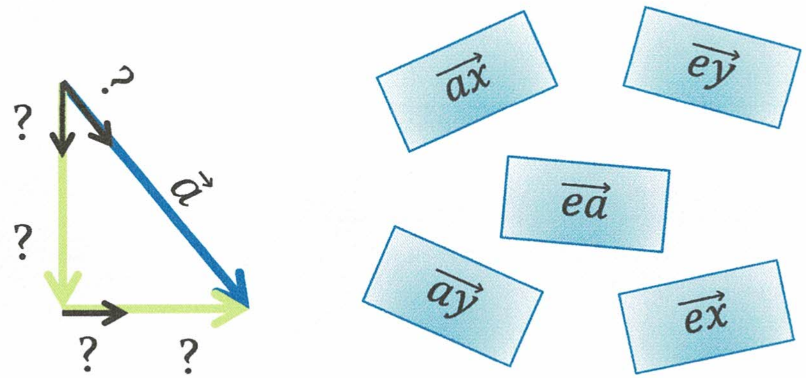
Rechts sieht man, dass der Einheitsvektor genau 3 mal reinpasst. Die Länge (Betrag) des Vektors ist somit 3

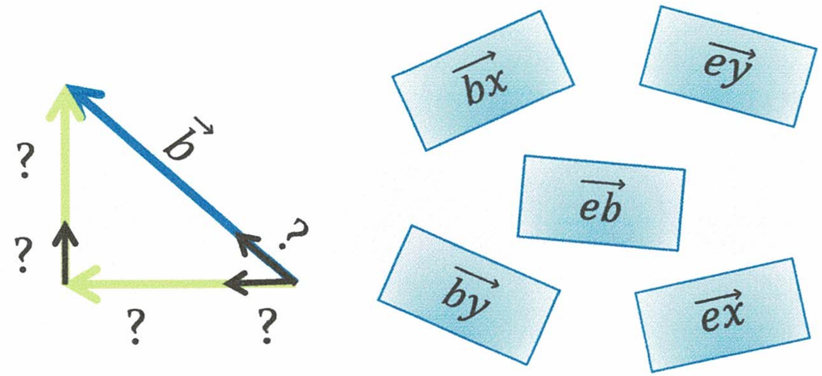


Übungen

Übung

Ordnen Sie dem Vektor die korrekten Bezeichnungen zu.

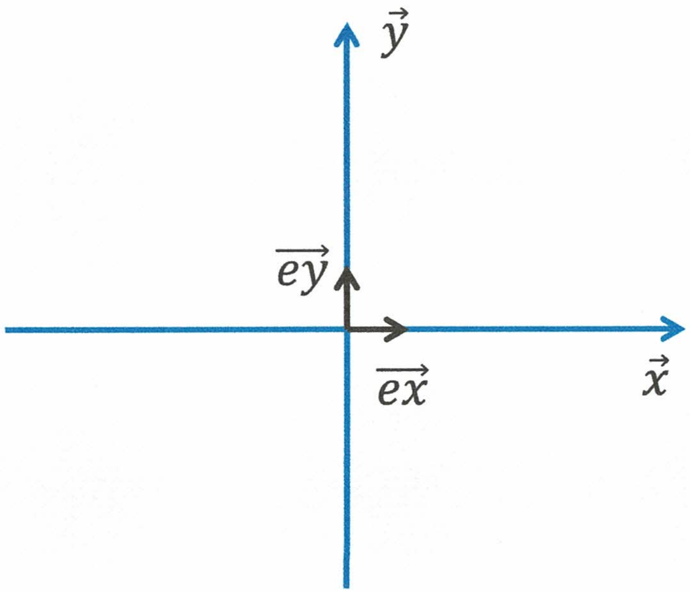




Vektoren im Koordinatensystem

Aufbau eines Koordinatensystems für die Vektoren

Möchte man mathematische Lösungen mit Vektoren realisieren, so muss man natürlich gewisse „Maße“ haben. Dazu führen wir uns ein kleines Koordinatensystem ein.

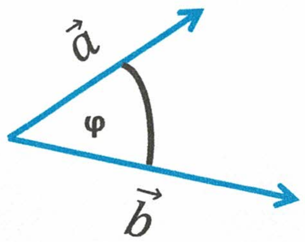


Wir brauchen also auch für die Achsen wieder einen Maßstab. Daher müssen wir auch dort wieder unsere Einheitsvektoren eintragen.

Die Achsen bestehen somit eigentlich auch aus Vektoren.

Das Skalarprodukt

Skalarprodukt über Euler-Form berechnen



$$\vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} bx \\ by \end{pmatrix} = ax*bx + ay*by$$

Wie bekomme ich denn nun den Winkel **φ** heraus ?

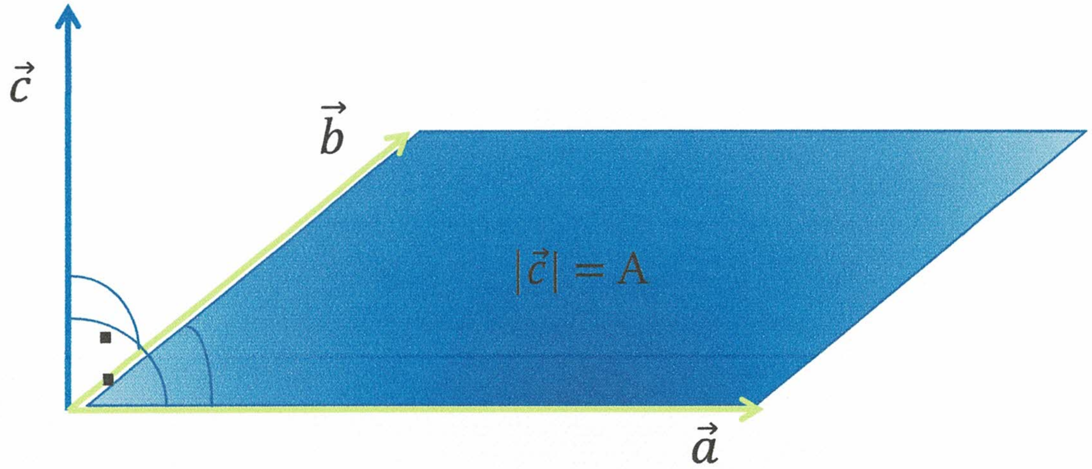
Dazu stellen wir einfach unsere Skalarprodukt-Formel nach dem Winkel um :

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{\boldsymbol{a}}| * |\vec{\boldsymbol{b}}| * \cos \boldsymbol{\varphi}$$

$$\cos \boldsymbol{\varphi} = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|} = \frac{ax*bx+ay*by}{\sqrt{ax^2+ay^2} * \sqrt{bx^2+by^2}}$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \arccos \left(\frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}\right)$$

Das Vektorprodukt



Die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen mit dem Winkel $\boldsymbol{\varphi}$ ein Parallelogramm auf.

Vom Betrag her ist die Fläche genauso groß, wie der Betrag des entstandenen Vektors $\vec{c}$.

$$|\vec{c}| = A$$

Das Vektorprodukt wird durch die zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und dem einschließendem Winkel $\boldsymbol{\varphi}$ gebildet.

Durch das Vektorprodukt bildet sich ein Parallelogramm und der Vektor $\vec{c}$.

Man schreibt das Vektorprodukt :

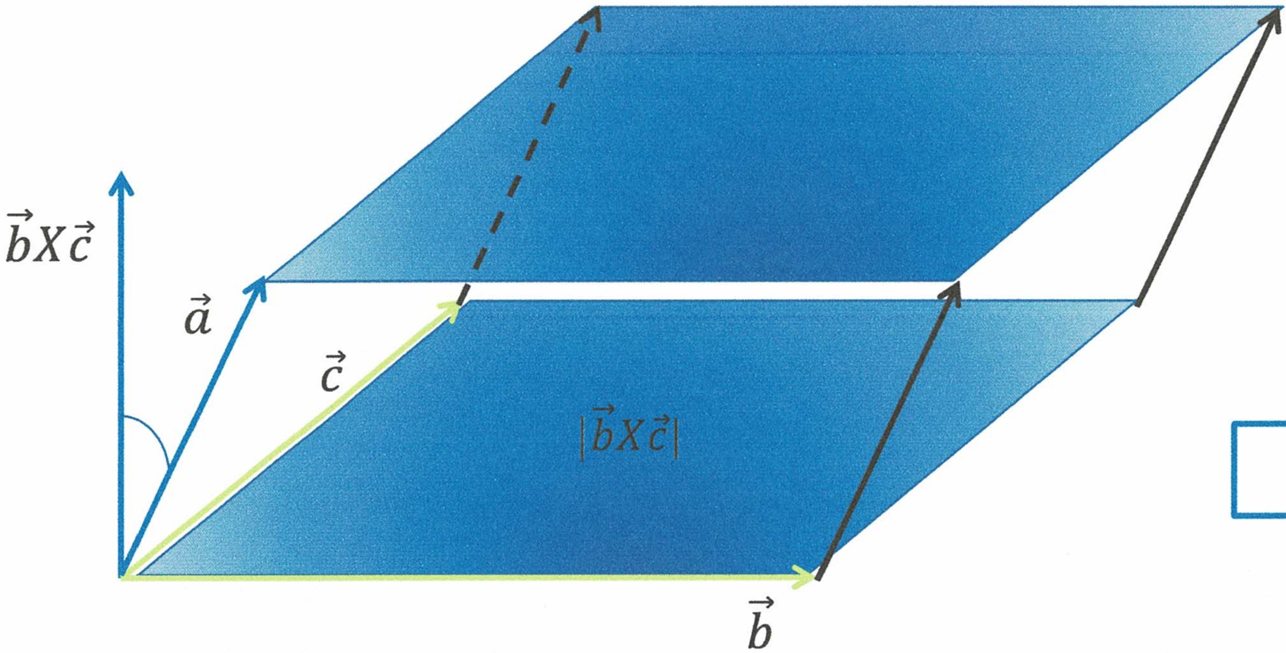
$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ **(sprich:** a kreuz b)

$|\vec{c}|=|\vec{a}| * |\vec{b}| * \sin \boldsymbol{\varphi}$

Wichtig

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein rechtshändiges System.

Das Spatprodukt



$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = \vec{a} * (\vec{b} \text{ X } \vec{c})$

Zuerst bildet man also das Vektorprodukt, was den Vektor ($\vec{b}$ X $\vec{c}$) ergibt. Dieser entstandene Vektor (oder Grundfläche) wird dann mit Hilfe des Skalarproduktes mit Vektor $\vec{a}$ (der schrägen Höhe) multipliziert und ergibt somit das Volumen oder das Spatprodukt $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$